Summation des Kettenbruches, dessen Indizes eine arithmetische Progression festlegen, während alle Zähler Einheiten sind, wo zugleich die Auflösung der Riccati-Gleichung durch Brüche von dieser Art gelehrt wird *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich in der vorhergehenden Abhandlung eine Methode erläutert hatte, Kettenbrüche auf zwei Integralformeln zurückzuführen, hat sie freilich in unendlich vielen Fällen glücklichen Erfolg gehabt: Aber der Fall, der am einfachsten scheint, wo alle Zähler einander gleich gesetzt werden, hat hingegen zu Integralformeln solcher Art geführt, welche es bis jetzt auf keine Weise zu entwickeln und miteinander zu vergleichen möglich gewesen ist, obwohl es dennoch von dieser Art zwei Kettenbrüche gibt, deren Werte hinreichend angenehm dargeboten werden können:

*Originaltitel: "Summatio fractionis continuae cuius indices progressionem arithmeticam constituunt dum numeratores omnes sunt unitates ubi simul resolutio aequationis Riccatianae per huiusmodi fractiones docetur", erstmals publiziert in „*Opuscula analytica* 2 1785, pp. 217-239", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 23, pp. 175 - 194 ", Eneström-Nummer E595, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$n+\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n+\cfrac{1}{7n+\text{etc.}}}}=\frac{e^{\frac{2}{n}}+1}{e^{\frac{2}{n}}-1}$$

und

$$n-\cfrac{1}{3n-\cfrac{1}{5n-\cfrac{1}{7n-\text{etc.}}}}=\cot\frac{1}{n},$$

von welchen freilich der eine leicht aus dem anderen abgeleitet wird, wenn $n\sqrt{-1}$ anstelle von n geschrieben wird.

§2 Wann immer aber die Indizes irgendeiner anderen arithmetischen Progression folgen, habe ich die Summation solcher Kettenbrüche schon einst in Buch XI der alten Kommentare unserer Akademie auf vollkommen einzigartige Weise auf die Riccati-Gleichung zurückgeführt. Aber die Methode, mit welcher ich dies geleistet habe, ist dort zu kurz dargestellt worden; daher, weil sie noch sehr viel mit sich zu bringen scheint, wird es der Mühe wert sein, sie umfassender zu erklären; besonders weil nicht nur noch niemand das Vermögen jener Methode bemerkt zu haben scheint, sondern ich auch selbst sie völlig vergessen hatte.

§3 Um diese Untersuchung klarer vor Augen zu führen, möchte ich vom allgemeinen Bruch aus beginnen, all dessen Zähler freilich Einheiten sind, die Indizes aber im Allgemeinen mit den Buchstaben a, b, c, d, e, f etc. bezeichnet werden, so dass der Kettenbruch selbst diese Form hat:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}}$$

dessen Wert mit dem Buchstaben S angezeigt werde, um welchen zumindest näherungsweise zu erkennen, aus den Indizes a, b, c, d, e etc. auf die gewohnte Weise die Reihe der folgenden Brüche gebildet werde

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & \\ \dfrac{A}{\mathfrak{A}} & \dfrac{B}{\mathfrak{B}} & \dfrac{C}{\mathfrak{C}} & \dfrac{D}{\mathfrak{D}} & \dfrac{E}{\mathfrak{E}} & \text{etc.,} \end{array}$$

deren Zähler wie Nenner auf die folgende Weise aus je zwei vorausgehenden bestimmt werden:

$$\begin{array}{lllll} A=a, & B=Ab+1, & C=Bc+A, & D=Cd+B & \text{etc.} \\ \mathfrak{A}=1, & \mathfrak{B}=\mathfrak{A}b, & \mathfrak{C}=\mathfrak{B}c+\mathfrak{A}, & \mathfrak{D}=\mathfrak{C}d+\mathfrak{B} & \text{etc.} \end{array}$$

§4 Nun wollen wir aber anstelle der Buchstaben A, B, C, D etc. und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. andere in die Rechnung einführen, welche seien

$$\begin{array}{lllll} A'=\dfrac{A}{a}, & B'=\dfrac{B}{ab}, & C'=\dfrac{C}{abc}, & D'=\dfrac{D}{abcd} & \text{etc.} \\ \mathfrak{A}'=\dfrac{\mathfrak{A}}{a}, & \mathfrak{B}'=\dfrac{\mathfrak{B}}{ab}, & \mathfrak{C}'=\dfrac{\mathfrak{C}}{abc}, & \mathfrak{D}'=\dfrac{\mathfrak{D}}{abcd} & \text{etc.,} \end{array}$$

und diese neuen Buchstaben werden auf die folgende Weise durch die Indizes und je zwei vorausgehende Terme bestimmt werden:

$$
\begin{array}{llll}
A' = 1, & B' = A' + \dfrac{1}{ab}, & C' = B' + \dfrac{A'}{bc}, & D' = C' + \dfrac{B'}{cd} \quad \text{etc.} \\[2ex]
\mathfrak{A}' = 1, & \mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' & \mathfrak{C}' = \mathfrak{B}' + \dfrac{\mathfrak{A}'}{bc}, & \mathfrak{D}' = \mathfrak{C}' + \dfrac{\mathfrak{B}'}{cd} \quad \text{etc.}
\end{array}
$$

Nachdem also diese Werte für einen gewissen Fall entwickelt worden sind, werden diese Brüche:

$$
\frac{A'}{\mathfrak{A}'}, \quad \frac{B'}{\mathfrak{B}'}, \quad \frac{C'}{\mathfrak{C}'}, \quad \frac{D'}{\mathfrak{D}'}, \quad \frac{E'}{\mathfrak{E}'} \quad \text{etc.}
$$

immer näher an den Wert S des vorgelegten Kettenbruches herankommen, und ins Unendliche fortgesetzt werden sie ihm vollkommen gleich werden.

§5 Damit die Formen dieser Buchstaben besser erkannt werden, wollen wir sie einfach durch die Indizes entwickeln, und zuerst werden wir freilich für die Zähler die folgenden Formeln auffinden:

$$
\begin{aligned}
A' &= 1 \\
B' &= 1 + \frac{1}{ab} \\
C' &= 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} \\
D' &= 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{abcd} \\
E' &= 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{de} + \frac{1}{abcd} + \frac{1}{abde} + \frac{1}{bcde}
\end{aligned}
$$

$$F' = 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{de} + \frac{1}{ef} + \frac{1}{abcd} + \frac{1}{abde} + \frac{1}{bcde} + \frac{1}{abef} + \frac{1}{bcef} + \frac{1}{cdef} + \frac{1}{abcdef}$$

etc.

Für die Nenner werden hingegen die folgenden Formeln hervorgehen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}' &= \frac{1}{a}\\
\mathfrak{B}' &= \frac{1}{a}\\
\mathfrak{C}' &= \frac{1}{a} + \frac{1}{abc}\\
\mathfrak{D}' &= \frac{1}{a} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{acd}\\
\mathfrak{E}' &= \frac{1}{a} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{ade} + \frac{1}{abcde}\\
\mathfrak{F}' &= \frac{1}{a} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{ade} + \frac{1}{aef} + \frac{1}{abcde} + \frac{1}{abcef} + \frac{1}{acdef}
\end{aligned}$$

etc.,

in welchen letzten Formeln die einzelnen Terme den Faktor $\frac{1}{a}$ haben, nach Weglassen von welchem die übrigen Faktoren auf die gleiche Weise durch die Indizes a, b, c, d, e, f etc. bestimmt werden werden, auf die die vorausgehenden lateinischen Buchstaben durch alle Indizes a, b, c, d, e etc. bestimmt worden sind.

§6 Wir wollen nun diese Entwicklungen auf den Fall anwenden, der uns hier vorgelegt worden ist, wo wir die Indizes a, b, c, d, e etc. nach einer arithmetischen Progression fortzuschreiten annehmen. Wir wollen also die Differenz, um welche diese Differenzen ununterbrochen wachsen, Δ setzen, und es werden die nach dem ersten folgenden Indizes diese sein

$$b = a + \Delta, \quad c = a + 2\Delta, \quad d = a + 3\Delta, \quad e = a + 4\Delta \quad \text{etc.}$$

Diese Werte wollen wir freilich nicht in den Nennern unserer Formel einsetzen, sondern sie im Wesentlichen gebrauchen, um die Formeln zusammenzuziehen.

§7 Nachdem also diese Progression festgelegt worden ist, wollen wir zuerst die Zähler unserer Brüche auf die folgende Weise entwickeln:

$$\begin{aligned}
A' &= 1 \\
B' &= 1 + \frac{1}{ab} \\
C' &= 1 + \frac{1}{bc} = 1 + \frac{2}{ac} \\
D' &= 1 + \frac{2}{ac} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{abcd} = 1 + \frac{3}{ad} + \frac{1}{abcd} \\
E' &= 1 + \frac{3}{ad} + \frac{1}{de} + \frac{1}{abcd} + \frac{2}{acde} = 1 + \frac{4}{ae} + \frac{3}{abde} \\
F' &= 1 + \frac{5}{af} + \frac{6}{abdf} + \frac{1}{abcdef} \\
G' &= 1 + \frac{6}{ag} + \frac{10}{abfg} + \frac{4}{abcefg} \\
H' &= 1 + \frac{7}{ah} + \frac{15}{abgh} + \frac{10}{acbfgh} + \frac{1}{abcdefgh} \\
I' &= 1 + \frac{8}{ai} + \frac{21}{abhi} + \frac{20}{abcghi} + \frac{5}{abcdfghi} \\
K' &= 1 + \frac{9}{ak} + \frac{28}{abik} + \frac{35}{abchik} + \frac{15}{abcdghik} + \frac{1}{abcdefghik}
\end{aligned}$$

etc.

§8 So wie also in diesen Formeln alle ersten Terme Einheiten sind, so schreiten die Zähler der zweiten nach den natürlichen Zahlen fort, die der dritten nach den Trigonalzahlen, die der vierten nach den ersten pyramidalen, dann nach den zweiten, den dritten etc. In den Nennern ist die Struktur gleichermaßen hinreichend offenbar. Daher werden wir also im Allgemeinen eine Formel darbieten können, die unbestimmt dem Index i entspricht. So, wenn dieser Ausdruck mit dem Buchstaben Z' bezeichnet wird, dann aber in der Reihe der Buchstaben a, b, c, d, e etc. $z = a + i\Delta$ war, die vorausgehenden hingegen diese waren

$$y = a + (i-1)\Delta, \quad x = a + (i-2)\Delta, \quad v = a + (i-3)\Delta \quad \text{etc.},$$

werden wir haben

$$Z' = 1 + \frac{i}{az} + \frac{(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot abyz} + \frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot abcxyz} + \frac{(i-3)(i-4)(i-5)(i-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot abcdvxyz} + \text{etc.}$$

§9 Was nun die germanischen Buchstaben $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ etc. betrifft, wird jeder beliebige derer aus dem vorausgehenden lateinischen gebildet, während die Buchstaben a, b, c, d, e um einen Schritt nach vorne bewegt werden. dann aber die einzelnen Terme mit $\frac{1}{a}$ multipliziert werden, so wird es sich dann verhalten wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}' &= 1\\
\mathfrak{B}' &= \frac{1}{a}\\
\mathfrak{C}' &= \frac{1}{a} + \frac{1}{abc}\\
\mathfrak{D}' &= \frac{1}{a} + \frac{2}{abd}\\
\mathfrak{E}' &= \frac{1}{a} + \frac{3}{abe} + \frac{1}{abcde}\\
\mathfrak{F}' &= \frac{1}{a} + \frac{4}{abf} + \frac{3}{abcef}\\
\mathfrak{G}' &= \frac{1}{a} + \frac{5}{abg} + \frac{6}{abcfg} + \frac{1}{abcdefg}\\
\mathfrak{H}' &= \frac{1}{a} + \frac{6}{abh} + \frac{10}{abcgh} + \frac{4}{abcdfgh}\\
\mathfrak{I}' &= \frac{1}{a} + \frac{7}{abi} + \frac{15}{abchi} + \frac{10}{abcdghi} + \frac{1}{abcdefghi}
\end{aligned}
$$

etc.,

woher im Allgemeinen, wenn dem Index i der Buchstabe $\mathfrak{Z}'$ entspricht, sein wird

$$\mathfrak{Z}' = \frac{1}{a} + \frac{(i-1)}{abz} + \frac{(i-2)(i-3)}{1\cdot 2\cdot abcyz} + \frac{(i-3)(i-4)(i-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot abcdxyz} + \frac{(i-4)(i-5)(i-6)(i-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot abcdevxyz} + \text{etc.}$$

§10 Wir wollen nun den Index z ins Unendliche vermehren, dass der Bruch $\frac{Z'}{\mathfrak{Z}'}$ den Wert des Kettenbruches selbst ausdrückt, den wir S genannt haben, so dass dann $S = \frac{Z'}{\mathfrak{Z}'}$ ist, und die Reduktion der gefundenen Formeln wird auf die folgende Weise durchgeführt werden. Zuerst wird natürlich für Z' sein

$$\frac{i}{z} = \frac{i}{a+i\Delta} = \frac{1}{\Delta}, \quad \text{wegen} \quad i = \infty;$$

für den dritten Term wird sein

$$\frac{(i-1)(i-2)}{yz} = \frac{(i-1)(i-2)}{(a+(i-1)\Delta)(a+i\Delta)} = \frac{1}{\Delta^2};$$

weiter aber auf die gleiche Weise

$$\frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{xyz} = \frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{(a+(i-2)\Delta)(a+(i-1)\Delta)(a+i\Delta)} = \frac{1}{\Delta^3}$$

und

$$\frac{(i-3)(i-4)(i-5)(i-6)}{vxyz} = \frac{1}{\Delta^4} \quad \text{etc.}$$

Auf die gleiche Weise wird auch die Formel für $\mathfrak{Z}'$

$$\frac{i-1}{z} = \frac{1}{\Delta}, \quad \frac{(i-2)(i-3)}{yz} = \frac{1}{\Delta^2}$$

und so weiter sein; deswegen werden für den Fall $i = \infty$ unsere beiden Formeln so angenehm zusammengezogen, dass wird

$$Z' = 1 + \frac{1}{a\Delta} + \frac{1}{1 \cdot 2ab\Delta^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3abc\Delta^3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4abcd\Delta^4} + \text{etc.}$$

und auf die gleiche Weise

$$\mathfrak{Z}' = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab\Delta} + \frac{1}{1 \cdot 2abc\Delta^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3abcd\Delta^3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4abcde\Delta^4} + \text{etc.}$$

§11 Weil also der gesuchte Wert $S = \frac{Z'}{\mathfrak{Z}'}$ ist, wollen wir sehen, auf welche Weise wir die beiden gefundenen Reihen auf endliche Ausdrücke zurückführen können. Für dieses Ziel wollen wir die beiden Reihen verallgemeinern, indem wir anstelle der Zähler, die alle 1 sind, irgendeine geometrische Progression einsetzen. Wir wollen also festlegen

$$p = 1 + \frac{x^{\Delta}}{a\Delta} + \frac{x^{2\Delta}}{1 \cdot 2ab\Delta^2} + \frac{x^{3\Delta}}{1 \cdot 2 \cdot 3abc\Delta^3} + \text{etc.}$$

und

$$q = \frac{1}{a} + \frac{x^{\Delta}}{ab\Delta} + \frac{x^{2\Delta}}{1 \cdot 2abc\Delta^2} + \frac{x^{3\Delta}}{1 \cdot 2 \cdot 3abcd\Delta^3} + \text{etc.}$$

Wenn wir daher die Werte p und q im Allgemeinen gefunden haben, dann aber $x = 1$ setzen, wird natürlich $S = \frac{p}{q}$ hervorgehen. Hier ist es aber offenbar, dass diese zwei Reihen eine außerordenliche Verbindung zueinander haben, und durch Differentiation die eine in die andere umgewandelt werden kann, welche Untersuchung wir auf die folgende Weise durchführen wollen.

§12 Zuerst gibt also die erste Reihe einfach differenziert

$$\frac{xdp}{dx} = \frac{x^{\Delta}}{a} + \frac{x^{2\Delta}}{ab\Delta} + \frac{x^{3\Delta}}{1 \cdot 2abc\Delta^2} + \frac{x^{4\Delta}}{1 \cdot 2 \cdot 3abcd\Delta^3} + \text{etc.},$$

welche Reihe mit der anderen q verglichen offenbar liefert

$$\frac{xdp}{dx} = x^{\Delta}q,$$

woher es klar zu tage tritt, wenn nur die Summe der einen dieser zwei Reihen bekannt wäre, dass auch die andere angegeben werden kann, weil ja aus dem bekannten Wert von q hervorgeht

$$q = \frac{dp}{x^{\Delta-1}dx};$$

andererseits wird aber aus dem bekannten Wert q

$$dp = x^{\Delta-1}qdx,$$

und daher

$$p = \int x^{\Delta-1}qdx,$$

welches Integral so genommen werden muss, dass nach Setzen von $x = 0$ dann $p = 1$ wird.

§13 Bevor wir aber die eine Reihe differenzieren, wollen wir sie mit x^a multiplizieren, und wegen

$$a + \Delta = b, \quad a + 2\Delta = c, \quad a + 3\Delta = d \quad \text{etc.}$$

wird sein

$$x^a q = \frac{x^a}{a} + \frac{x^b}{ab\Delta} + \frac{x^c}{1 \cdot 2abc\Delta^2} + \frac{x^d}{1 \cdot 2 \cdot 3abcd\Delta} + \text{etc.}$$

Nun wird die Gleichung differenziert und wiederum mit x multipliziert geben

$$xd.\frac{x^a q}{dx} = x^a + \frac{x^b}{a\Delta} + \frac{x^c}{1 \cdot 2ab\Delta^2} + \frac{x^d}{1 \cdot 2 \cdot 3abc\Delta^3} + \text{etc.},$$

aber die erste Reihe p hingegen liefert ebenso mit x^a multipliziert

$$x^a p = x^a + \frac{x^b}{a\Delta} + \frac{x^c}{1 \cdot 2ab\Delta^2} + \frac{x^d}{1 \cdot 2 \cdot 3abc\Delta^3} + \text{etc.},$$

weil welche Reihen vollkommen gleich sind, wird gelten

$$\frac{x}{dx}d. \cdot x^a q = x^a p, \quad \text{und daher} \quad d.x^a q = px^{a-1}dx,$$

und so haben wir zwei Differentialgleichungen zwischen p und q erlangt, aus denen es mglich sein wird, den Wert jeder der beiden zu finden.

§14 Weil aus der ersten Gleichung gilt

$$q = \frac{dp}{x^{\Delta-1}dx}, \quad \text{wird sein} \quad x^a q = \frac{x^{a-\Delta+1}dp}{dx},$$

woher für konstant angenommenes Element dx werden wird

$$d.x^a q = \frac{x^{a-\Delta+1}ddp + (a-\Delta+1)x^{a-\Delta}dpdx}{dx},$$

und so erlangen wir nach Herauswerfen der Größe q für die andere p diese Differentialgleichung zweiten Grades:

$$px^{a-1}dx = \frac{x^{a-\Delta+1}ddp + (a-\Delta+1)x^{a-\Delta}dpdx}{dx},$$

wenn es möglich gewesen ist, besagte aufzulösen, wird die ganze Aufgabe erledigt sein. Dort ist es sittsam anzumerken, weil gilt

$$p = 1 + \frac{x^{\Delta}}{a\Delta} + \frac{x^{2\Delta}}{1 \cdot 2ab\Delta^2} + \text{etc.},$$

dass die Integration so druchgeführt werden muss, dann nach Setzen von $x = 0$ dann $p = 1$ wird; dann aber, weil auch gilt

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x^{\Delta-1}}{a} + \frac{x^{2\Delta-1}}{ab\Delta} + \text{etc.},$$

erfordert die andere Intgrationsbedingung, dass nach Setzen von $x = 0$ auch $\frac{dp}{dx} = 0$ wird, wenn freilich $\Delta > 1$ war; wenn es nämlich $= 1$ wäre, muss im Fall $x = 0$ dann $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}$ werden. Aber wenn $\Delta < 1$ ist, wird $\frac{dp}{dx} = \infty$ werden müssen.

§15 Weil also der Bruch $\frac{p}{q}$ nach Setzen von $x = 1$ den Wert unseres Kettenbruches S liefert, wollen wir festlegen, dass im Allgemeinen $\frac{p}{q} = z$ ist, dass fr̈ $x = 1$ gesetzt $z = S$ wird, woher es klar zu tage tritt, dass Im Fall $x = 0$ $z = a$ werden muss. Weil also $p = qz$ ist, wird $dp = qdz + zdq$ sein; es war aber aus der ersten Gleichung

$$q = \frac{dp}{x^{\Delta-1}dx},$$

weswegen wir haben werden

$$q = \frac{qdz + zdq}{x^{\Delta-1}dx},$$

oder $x^{\Delta-1}qdx = qdz + zdq$, woher wird

$$dq = \frac{x^{\Delta-1}qdx - qdz}{z};$$

es war aber $dp = x^{\Delta-1}qdx$.

§16 Diese Dinge folgen also aus der ersten gefundenen Differentialgleichung $\frac{dp}{x^{\Delta-1}dx} = q$. Durch die andere hingegen, die diese ist

$$d.x^a q = px^{a-1}dx,$$

weil aus

$$d.x^a q = ax^{a-1}qdx + x^a dq,$$

nachdem anstelle von dq der gerade gefundene Wert eingesetzt worden ist, hervorgeht

$$d.x^a q = ax^{a-1}qdx + \frac{x^{a+\Delta-1}qdx - x^a qdz}{z},$$

werden wir haben

$$px^{a-1}dx = ax^{a-1}qdx + \frac{x^{a+\Delta-1}qdx - x^a qdz}{z},$$

welche Gleichung, wegen $p = qz$, durch q dividiert diese Differentialgleichung ersten Grades liefert:

$$x^{a-1}zdx = ax^{a-1}dx + \frac{x^{a+\Delta-1}dx - x^a dz}{z},$$

welche mit z multipliziert und durch x^{a-1} dividiert liefert

$$zzdx = azdx + x^{\Delta}dx - xdz,$$

wenn deren Auflösung so durchgeführt wird, dass nach Setzen von $x = 0$ $z = a$ wird, dann aber $x = 1$ wird, wird der Wert von z den Wert des Kettenbruches selbst geben, den wir suchen.

§17 Die ganze Aufgabe ist also auf die Auflösung dieser Differentialgleichung ersten Grades zurückgeführt worden

$$zzdx = azdx + x^{\Delta}dx - xdz,$$

welche natürlich in jeder hochberühmten Riccati-Gleichung enthalten ist. Um sie nämlich auf nur drei Terme zu reduzieren, werde $z = x^a y$ gesetzt, so dass $y = \frac{z}{x^a}$ ist, woher wird

$$dz = ax^{a-1}ydx + x^a dy,$$

welche also so integriert werden muss, dass, nachdem $x = 0$ oder unendlich klein festgelegt worden ist, $y = \frac{a}{x^a}$ ist, das heißt $y = \infty$, wonach, wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist, der Wert von y die Summe des vorgelegten Kettenbruches geben wird.

§18 Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, wollen wir durch x^{a+1} dividieren, dass wir haben

$$dy + x^{a-1}yydx = x^{\Delta-a-1}dx;$$

nun wollen wir aber $x^a = t$ setzen, so dass im Fall $x = 0$ auch $t = 0$, und im Fall $x = 1$ auch $t = 1$ wird, woher, wenn t verschwindet, $y = \frac{a}{t}$ oder $y = \infty$ werden muss. Nachdem aber dieser Wert eingeführt worden ist, wird wegen $x = t^{\frac{1}{a}}$ und

$$dx = \frac{t^{\frac{1-a}{a}}dt}{a}$$

unsere Gleichung werden

$$ady + yydt = t^{\frac{\Delta-2a}{a}}dt,$$

welches die gewohnteste Form der RICCATI-Gleichung ist.

§19 Wann immer also ein solcher Kettenbruch vorgelegt war:

$$a + \cfrac{1}{a + \Delta + \cfrac{1}{a + 2\Delta + \cfrac{1}{a + 3\Delta + \cfrac{1}{a + 4\Delta + \text{etc.}}}}}$$

muss, um seinen seinen Wert ausfindig zu machen, diese RICCATI-Gleichung aufgelöst werden:

$$ady + yydt = t^{\frac{\Delta-2a}{a}}dt;$$

wo die Integration so durchgeführt werden muss, dass für unendlich klein angenommenes t $y = \frac{a}{t}$ wird, wonach $t = 1$ gesetzt werde, und der für y resultierende Wert wird der Wert dieses Kettenbruches sein.

§20 Wir wollen den einfachsten Fall entwickeln, in welchem auf der rechten Seite der Exponent von t dem Nichts gleich wird, was also passiert, wenn $\Delta = 2a$ ist, und daher der Kettenbruch selbst dieser ist

$$a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \cfrac{1}{7a + \text{etc.}}}}$$

für dessen Auflösung wir diese Differentialgleichung haben werden:

$$ady + yydt = dt, \quad \text{daher} \quad dt = \frac{ady}{1 - yy},$$

und durch Integrieren

$$t = \frac{a}{2} \log \frac{1+y}{1-y} + C,$$

welche Konstante C so zu nehmen ist, dass nach Setzen von $t = 0$ y unendlich und daher $t = \frac{a}{y}$ wird; daher tritt es klar zu tage, dass in diesem Fall $y = \infty$ wird, woraus sofort eingesehen wird, dass die Integralgleichung so geschrieben werden muss:

$$t = \frac{a}{2} \log \frac{y+1}{y-1} + C,$$

oder die Integration so durchgeführt werden muss, dass nach Setzen von $t = 0$ y unendlich wird. Nun wird aber, wenn y unendlich ist, $\log \frac{y+1}{y-1} = \frac{2}{y}$ sein, woher, weil $t = \frac{a}{y}$ werden muss, $C = 0$ wird, so dass die richtige Integralgleichung $t = \frac{a}{2} \log \frac{y+1}{y-1}$ ist, woher, während e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist, $e^{\frac{2t}{a}} = \frac{y+1}{y-1}$, und daher weiter $y = \frac{e^{\frac{2t}{a}}+1}{e^{\frac{2t}{a}}-1}$ werden wird, woher nach Setzen von $t = 1$ die Summe unseres Kettenbruches $\frac{e^{\frac{2}{a}}+1}{e^{\frac{2}{a}}-1}$ sein wird, welches derselbe Wert ist, den ich schon vor langer Zeit gefunden hatte.

§21 Wir wollen nun auch die übrigen Fälle der Integrierbarkeit der RICCATI-Gleichung betrachten, in denen der Exponent von t auf der rechten Seite entweder -4 oder $-\frac{4}{3}$, oder $-\frac{8}{3}$, oder $-\frac{8}{5}$, oder $-\frac{12}{5}$, oder $-\frac{12}{7}$ etc. ist. Es sei also zuerst $\frac{\Delta-2a}{a} = -4$ oder $\Delta = -2a$, woher dieser Kettenbruch entsprießt:

$$a + \cfrac{1}{-a + \cfrac{1}{-3a + \cfrac{1}{-5a + \cfrac{1}{-7a + \text{etc.}}}}}$$

welcher offenbar vom vorausgehenden abhängt. Wenn wir nämlich setzen

$$-a + \cfrac{1}{-3a + \cfrac{1}{-5a + \text{etc.}}} = s,$$

wird nach Verändern der Vorzeichen sein

$$-s = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \cfrac{1}{7a + \text{etc.}}}}$$

weil dessen Wert schon gefunden worden ist, offenbart dieser Fall nichts Neues.

§22 Wenn Nachstehendes genommen wird

$$\frac{\Delta - 2a}{a} = -\frac{4}{3}, \quad \text{oder} \quad \Delta = \frac{2}{3}a,$$

entsprießt daher der folgende Kettenbruch:

$$a + \cfrac{1}{\frac{5}{3}a + \cfrac{1}{\frac{7}{3}a + \cfrac{1}{\frac{9}{3}a + \text{etc.}}}}$$

oder durch Setzen von $a = 3\alpha$ wird der Bruch sein

$$3\alpha + \cfrac{1}{5\alpha + \cfrac{1}{7\alpha + \cfrac{1}{9\alpha + \text{etc.}}}}$$

welches die obere Form um das erste Glied beschnitten selbst ist. Dasselbe passiert, wenn $\frac{\Delta-2a}{a} = -\frac{8}{3}$ oder $\Delta = -\frac{2}{3}a$ ist, woher dieser Kettenbruch entspringt, indem natürlich zuvor $a = 3\alpha$ gesetzt wird:

$$3\alpha + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{-\alpha + \cfrac{1}{-3\alpha + \cfrac{1}{-5\alpha + \text{etc.}}}}}$$

und so werden wir immer zur anfänglichen Form zurückgeführt.

§23 Der Fall der Integrierbarkeit ist aber im Allgemeinen in diesem Exponenten enthalten: $-\frac{4i}{2i\pm1}$. Nach Setzen von

$$\frac{\Delta-2a}{a}=-\frac{4i}{2i\pm1}\quad\text{wird also werden}\quad\Delta=\frac{\pm2a}{2i\pm1},$$

woher nach Setzen von $\frac{a}{2i\pm1}=\alpha$ auch $\Delta=\pm2\alpha$ sein wird, also wird wegen $a=(2i\pm1)\alpha$ der Kettenbruch sein

$$(2i\pm1)\alpha+\cfrac{1}{a\pm2\alpha+\cfrac{1}{a\pm4\alpha+\cfrac{1}{a\pm6\alpha+\text{etc.}}}}$$

wo offenbar wiederum alle ungeraden Zahlen auftauchen, sodass der daher entspringende Kettenbruch immer aus unserem anfänglichem gebildet werden kann

$$a+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{5a+\cfrac{1}{7a+\text{etc.}}}}$$

wenn sie entweder um einige Glieder beschnitten wird oder in rückwärtiger Reihenfolge zu einigen Gliedern nach oben fortgesetzt wird.

§24 Weil also alle Fälle der Integrierbarkeit der Riccati-Gleichung zum selben Kettenbruch führen, können zusätzlich keine anderen Fälle entwickelt werden; daher folgt offenbar, wenn die Indizes des Kettenbruches, also a, b, c, d, e, f etc., irgendeine andere arithmetische Progression festlegen, dass dann die Summe auf überhaupt keine Weise angegeben werden kann, weil sie ja von einem unauflösbaren Fall der Riccati-Gleichung abhängt. So, wenn dieser Kettenbruch vorgelegt wird:

$$a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{4a+\text{etc.}}}}$$

wo $\Delta = a$ ist, wird die Summation von dieser Differentialgleichung abhängen:

$$ady + yydt = \frac{dt}{t},$$

weil deren Auflösung durch keine bis jetzt gebräuchlichen transzendenten Größen erledigt werden kann, suchen wir den Wert dieses Kettenbruches vergeblich unter den vom Kreis oder von Logarithmen abhängenden Größen, oder sogar unter allen Quadraturen von algebraischen Kurven; daher ist es nicht verwunderlich, dass die in der oberen Abhandlung gebrauchte Methode für solche Fälle keinen Erfolg gehabt hat.

§25 Weil wir ja dennoch in der oberen Abhandlung die Summe solcher Kettenbrüche durch zwei Integralformeln ausgedrückt angegeben haben, wird jener Ausdruck auch für dieselben Fälle auf die Riccati-Gleichung angewendet werden können, was natürlich die größte Aufmerksamkeit verdient, weil diese Gleichung noch auf keine Weise außer den integrierbaren Fällen hat behandelt werden können. Deswegen wird es besonders der Mühe wert sein, die Lösungen miteinander zu vergleichen, weil ja daher ein nicht zu verachtendes Hilfsmittel, die Riccati-Gleichung mit glücklichem Erfolg zu behandeln, erwartet werden können wird.

§26 In der oberen Abhandlung habe ich gezeigt, wenn dieser Kettenbruch vorgelegt war:

$$m-b+\cfrac{1}{2m-b+\cfrac{1}{3m-b+\cfrac{1}{4m-b+\text{etc.}}}}$$

dass sein Wert durch diesen Bruch ausgedrückt wird: $-\frac{A}{B}$, während gilt

$$A=\int\frac{dx}{x^{2+\frac{b}{m}}\cdot e^{\frac{1+xx}{mx}}}$$

und

$$B=\int\frac{dx}{x^{1+\frac{b}{m}}\cdot e^{\frac{1+xx}{mx}}},$$

wenn freilich die zwei Integrale von der Grenze $x=0$ bis hin zur Grenze $x=\infty$ erstreckt werden.

§27 Wir wollen nun diesen Kettenbruch mit dem allgemeinen vergleichen, den wir hier behandelt haben:

$$a+\cfrac{1}{a+\Delta+\cfrac{1}{a+2\Delta+\cfrac{1}{a+3\Delta+\text{etc.}}}}$$

dessen Wert in dieser Gleichung enthalten ist:

$$ady+yydt=t^{\frac{\Delta-2a}{a}}dt,$$

nachdem die Integration natürlich so durchgeführt worden ist, dass im Fall $t=0$ $y=\infty$ wird; dann werde aber $t=1$ gesetzt, woher der Wert von y die Summe dieses Kettenbruches ausdrücken wird.

§28 Nach Anstellen eines Vergleiches wird also werden

$$m = \Delta \quad \text{und} \quad B = \Delta - a,$$

nach Einführen welcher Werte jene Integralformeln sein werden

$$A = \int \frac{dx}{x^{3-\frac{a}{\Delta}} \cdot e^{\frac{1+xx}{\Delta x}}}$$

und

$$B = \int \frac{dx}{x^{2-\frac{a}{\Delta}} \cdot e^{\frac{1+xx}{\Delta x}}},$$

nachdem die Integrale wiederum von $x = 0$ bis $x = \infty$ genommen worden sind; deswegen wird der Wert von y, der aus der Gleichung

$$ady + yydt = t^{\frac{\Delta - 2a}{a}} dt$$

für den Fall $t = 1$ resultiert, diesem Bruch gleich sein: $-\frac{A}{B}$, oder es wird sein

$$y = \frac{\int \frac{dx}{x^{3-\frac{a}{\Delta}} \cdot e^{\frac{1+xx}{\Delta x}}}}{\int \frac{dx}{x^{2-\frac{a}{\Delta}} \cdot e^{\frac{1+xx}{\Delta x}}}}.$$

Obwohl aber diese Gleichheit nur Spezialfälle, in denen dort $t = 1$, hier hingegen $x = \infty$ wird, betrifft, wird dennoch unter Umständen eine Relation solcher Art zwischen den zwei Variablen t und x gefunden werden können, dass auch im Allgemeinen die Größe y jener Formel gleich wird.

§29 So wie die Betrachtung unseres Kettenbruches uns zur Auflösung der Riccati-Gleichung geführt hat, so ist umgekehrt eine direkte Methode gegeben, mit welcher diese Gleichung durch Kettenbrüche aufgelöst werden kann. Damit dies leichter gezeigt wird, werde die Riccati-Gleichung, die für gewöhnlich in dieser Form vorgelegt zu werden pflegt:

$$dy + ayydx = acx^{2m}dx,$$

in eine andere an das gegenwärtige Unterfangen besser angepasste Form überführt, indem festgelegt wird

$$y = x^m z \quad \text{und} \quad x^{m+1} = t;$$

dann nämlich, wenn b anstelle von $\frac{a}{m+1}$ geschrieben wird, geht diese Gleichung hervor:

$$dz + \frac{mzdt}{(m+1)t} + bzzdt = bcdt.$$

§30 Wir wollen weiter $\frac{m}{m+1} = -n$ setzen, dass $m = -\frac{n}{1+n}$ und uns diese Gleichung vorgelegt ist:

$$dz - n\frac{zdt}{t} + bzzdt = bcdt,$$

die, wenn wir diese Substitution verwenden:

$$z = \frac{n+1}{bt} + \frac{c}{v},$$

in diese Form verwandelt wird:

$$dv - (n+2)\frac{vdt}{t} + bvvdt = bcdt,$$

die sich von der ersten nur darin unterscheidet, dass hier die Zahl n um zwei Einheiten kleiner gemacht worden ist; daher, wenn wir weiter setzen

$$v = \frac{n+3}{bt} + \frac{c}{u},$$

wird diese Gleichung hervorgehen:

$$du - (n+4)udt + buudt = bcdt,$$

woher es klar zu tage tritt, wenn die erste Gkleichung im Fall $n = k$ eine Auflösung zulässt, dass dann ihre Auflösung auch in den folgenden Fällen

$$n = k+2, \quad n = k+4, \quad n = k+6, \quad \text{etc.}$$

und daher im Allgemeinen im Fall $n = k + 2i$ in unserer Macht stehen wird, während i irgendeine ganze Zahl bezeichnet.

§31 Wenn wir daher nun nacheinander anstelle von v und u und der folgenden Buchstaben diese entsprechenden Werte einsetzen, wird für die Größe z der folgende Kettenbruch hervorgehen:

$$z = \frac{n+1}{bt} + \cfrac{c}{\frac{n+3}{bt} + \cfrac{c}{\frac{n+5}{bt} + \text{etc.}}}$$

welcher Ausdruck also den Wert der Größe z bezeichnet, welcher selbiger vermöge dieser Gleichung zukommt:

$$dz - n\frac{zdt}{t} + bzzdt = bcdt,$$

wenn sie natürlich so integriert wird, dass nach Setzen von $t = 0$ $z = \infty$ wird.

§32 Wir wollen diese Form von den Partialbrüchen befreien, und werden diese Form erhalten:

$$\frac{1}{z} = \cfrac{bt}{n+1+\cfrac{bbctt}{n+3+\cfrac{bbctt}{n+5+\cfrac{bbctt}{n+7+\text{etc.}}}}}$$

woher es sofort klar zu tage tritt, dass nach Setzen von $t = 0$ $\frac{1}{z} = 0$ und daher $z = \infty$ sein wird. Auf die gleiche Weise können wir die Auflösung auch von der transformierten Gleichung aus beginnen, welche war

$$dv - (n+2)\frac{vdt}{t} + bvvdt = bcdt,$$

welche in die erste transformiert wird, indem $v = \frac{bct}{-n-1+btz}$ gesetzt wird; es wird nämlich hervorgehen

$$dz - \frac{nzdt}{t} + bzzdt = bcdt,$$

in welcher Gleichung die Zahl n um zwei Einheiten verkleinert worden ist; daher tritt es klar zu tage, wenn die Gleichung im Fall $n = k$ eine Auflösung zulässt, dass die Auflösung dann auch in den Fällen

$$n = k - 2, \quad n = k - 4, \quad n = k - 6$$

und im Allgemeinen $n = k - 2i$ gelingen wird. Daher, weil die Auflösung im Fall $n = 0$ keine Schwierigkeiten bereitet, werden nach Nehmen von $k = 0$ alle eine Auflösung zulassenden Fälle in dieser Formel enthalten sein: $n = \pm 2i$ und daher wird für die übliche Form werden

$$m = \frac{\mp 2i}{\pm 2i + 1} = -\frac{2i}{2i \pm 1},$$

welche die allbekannten Fälle der Integrierbarkeit enthält.

§33 Wir wollen $n + 2 = -\nu$ setzen, dass die Gleichung, von welcher aus wir hier beginnen, ist

$$dv + \frac{\nu v dt}{t} + bvvdt = bcdt,$$

welche also nach Setzen von

$$v = \frac{bct}{\nu + 1 + btz}$$

in diese Form verwandelt wird:

$$dz + (\nu + 2)\frac{zdt}{t} + bzzdt = bcdt,$$

in welcher nun die Zahl ν um zwei Einheiten vermehrt werden wird. Daher, wenn wir weiter setzen

$$z = \frac{bct}{\nu + 3 + bty},$$

wird diese Gleichung entspringen:

$$dy + (\nu + 4)\frac{ydt}{t} + byydt = bcdt,$$

und, indem so weiter fortgeschritten wird, wird zu $\nu + 5$, $\nu + 7$ etc. gelangt werden.

§34 Wir wollen also diese Werte in der oberen Gleichung einsetzen, welche ist

$$dv + \frac{\nu vdt}{t} + bvvdt = bcdt,$$

und für v wird der folgende Kettenbruch hervorgehen:

$$v = \cfrac{bct}{\nu + 1 + \cfrac{bcctt}{\nu + 3 + \cfrac{bcctt}{\nu + 5 + \cfrac{bcctt}{\nu + 7 + \text{etc.}}}}}$$

Dieser Ausdruck hat also Geltung, wenn die Differentialgleichung so integriert wird, dass nach Setzen von $t = 0$ auch $v = 0$ wird.

§35 Wir haben also aus der Riccati-Gleichung zwei Kettenbrüche gefunden, um welche leichter miteinander zu vergleichen, wollen wir anstelle von ν wiederum n schreiben, dass wir diese zwei Differentialgleichungen haben:

$$\text{I.}\quad dz - n\frac{zdt}{t} + bzzdt = bcdt,$$

$$\text{II.}\quad dv + n\frac{vdt}{t} + bvvdt = bcdt,$$

und aus der ersten wird dieser Kettenbruch entsprießen:

$$\frac{1}{z} = \cfrac{bt}{n+1+\cfrac{bbctt}{n+3+\cfrac{bbctt}{n+5+\text{etc.}}}}$$

aus der anderen entspringt hingegen

$$v = \cfrac{bct}{n+1+\cfrac{bbctt}{n+3+\cfrac{bbctt}{n+5+\text{etc.}}}}$$

welche Brüche also völlig miteinander übereinstimmen, weil daher $v = \frac{c}{z}$ wird, auf welche Weise natürlich die eine Gleichung tatsächlich in die andere verwandelt wird, so dass diese zwei Formen für eine einzige zu halten sind.

§36 Die Auflösung der Riccati-Gleichung in einen Kettenbruch ist also umso mehr der Aufmerksamkeit würdig, weil diese Gleichung bis jetzt auf keine Weise in eine reguläre unendliche Reihe hat aufgelöst werden können. Denn die Reihen, die ich einst für ihre Auflösung dargeboten habe, sind so beschaffen, dass eine unendliche Reihe durch die andere dividiert die Auflösung der Riccati-Gleichung an die Hand gibt; hier ist aber von einer einzigen einfachen Reihe die Rede. Daher ergibt sich also die Frage, ob unter Umständen nicht auch andere Differentialgleichungen gegeben sind, deren Auflösung sich in gleicher Weise durch Kettenbrüche erledigen lässt.